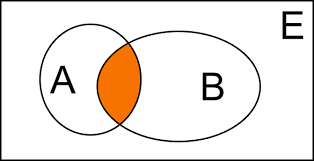
**GLI INSIEMI**

La definizione di INSIEME non esiste, la “piu bella” è questa:

un **INSIEME** è una “collezione” di oggetti, virgolettato che serve per spiegare che questa non è una vera definizione.

* **NOTAZIONE** (rappresentazione)

Per rappresentare un insieme, che di solito viene rappresentato con la lettera maiuscola, utilizzeremo:

* **DIAGRAMMA DI EULERO-VENN** che non è altro che una circonferenza dove all’interno collochiamo la nostra collezione di oggetti;
* **A: {a,b,c,d,…}**, elenco degli oggetti all’interno delle graffe separate dalla virgola;
* **A: {elementi I caratteristiche o proprietà comuni}**, chi sono gli elementi e che cosa hanno in comune;

ES. N: {0,1,2,3,…} elencazione degli oggetti

P: {0,2,4,6,8,…} elencazione degli oggetti

P: {n∈N I n è pari} caratteristica comune degli elementi

Per scrivere l’insieme P è stato necessario appoggiarsi a un altro insieme, in questo caso l’insieme N.

Un insieme che non possiede elementi si dice insieme **VUOTO** e si denota con Ø.

N= naturali {-2,-1,0,1,2,3,…}

Z= interi {0,1,2,3,…}

Q= razionali {r/s I r∈Z, s∈Z≠0}

R= reali {π,e,0,1,2,…}

C= complessi {a+bi I a,b∈R}

* **SOTTOINSIEME**

Siano A e B insiemi, B si dice sottoinsieme di A se ogni suo elemento appartiene ad A, scriveremo quindi B⊆A (B⊆A se ⩝b⊆B: b⊆A)

(**NOTAZIONE**= per esprimere il concetto di appartenenza utilizzeremo il simbolo ∈.

ES. Ø⊆A per ogni insieme A

dato un insieme avremo sempre 2 sottoinsiemi, detti sottoinsiemi banali

L’ Ø è sempre sottoinsieme di A

A⊆A, A è sempre sottoinsieme di A

N⊆Z⊆Q⊆R⊆C (i numeri complessi sono l’insieme più grande che contiene tutti gli altri)

* **INSIEMI UGUALI**

Due insiemi A e B si definiscono UGUALI se A⊆B e B⊆A, questo è il PRINCIPIO DI UGUAGLIANZA DEGLI INSIEMI.

* **CARDINALITà**

Dato un insieme A, si dice cardinalità di A (e sarà indicato con IAI) il numero di elementi di A

ES: se A: {1,2,3}, IAI=3

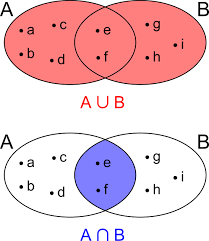
IØI=0, l’insieme vuoto non ha elementi

OSS. Se A e B sono insiemi e B⊆A, IBI≤IAI

La cardinalità di N,Z,Q,R,C è ∞

* **UNIONE**

Siano A e B insiemi, si dice UNIONE di A con B l’insieme A U B: {x I x∈A o x∈B}

ES. A: {1,0,2} B: {1,#}

A U B: {1,0,2,#}

Dal punto di vista del diagramma di Eulero-Venn avremo:

* **INTERSEZIONE**

Siano A e B si dice INTERSEZIONE di A con B l’insieme A∩B={x I x∈A e x∈B}

ES. A={1,2,0}

B={2,3,π}

A∩B={2}

ES. A={1,2,0}

B={e,π}

A∩B={ Ø }

ES. A={1,2,0}

B={1,2}

A∩B={1,2}=B

PROP. Se B⊆A, A∩B=B

DIM. Il nostro obiettivo è quello di provare l’uguaglianza tra i due insiemi, due insiemi sono uguali se l’uno è contenuto nell’altro e viceversa.

Dobbiamo provare che 1)A∩B⊆B e 2)B⊆A∩B

1. Prensiamo un elemento qualsiasi, sia x∈ A∩B=>x∈A e x∈B=>x∈B
2. Sai x∈B=>x∈A=>x∈B e x∈A=>x∈A∩B

* **COMPLEMENTARE**

Siano A e B insiemi tali che A⊆E. si dice COMPLEMENTARE di A (rispetto ad E), l’insieme

={x∈E I x∉A}

ES. N⊆Z ={…,-1,-2,-3,…}

Le ipotesi sono fondamentali, per poter parlare di complementare devo avere la condizione necessaria di A contenuto in E.

* **DIFFERENZA**

Siano A e B insiemi si dice DIFFERENZA di A con B l’insieme A/B={x∈A I x∉B}

ES. A={1,2,3}

B={#}

B/A={1,2,3}=A

A/B={#}=B

ES: A={1,2,3}

B={1,2}

A/B={3}

B/A= Ø

OSS. Se B⊆A, A/B= (complementare) B/A= Ø

OSS. A U B = A/B U A∩B U B/A

* **INSIEME DELLE PARTI**

Se A è un insieme, si dice INSIEME DELLE PARTI di A l’insieme di tutti i suoi sottoinsiemi. Gli elementi di questi sottoinsiemi hanno la caratteristica comune di essere tutti elementi appartenenti a un sottoinsieme di A.

ES. A={1,2,π}

In questo caso specifico possiamo visualizzare e contare i sottoinsiemi, poichè A è un insieme finito.

SOTTOINSIEMI CON 3 ELEMENTI A

SOTTOINSIEMI CON 2 ELEMENTI {1,2} {1,π} {2,π}

SOTTOINSIEMI CON 1 ELEMENTO {1} {2} {π}

SOTTOINSIEMI CON 0 ELEMENTI Ø

P(A)= {A, {1,2}, {1,π}, {2,π},{1}, {2}, {π}, Ø }

**TEOREMA**

Se A è un insieme IAI < IP(A)I

OSS. IØI=0 P(A)= {Ø} e IP(A)I=1

* **PRODOTTO CARTESIANO**

Siano A e B 2 insiemi, si chiamerà AxB (“A cartesiano B”) = {(a, b) | a∈A, b∈B} il PRODOTTO CARTESIANO di A con B

ES. A={-1,2} B={@,#,$}

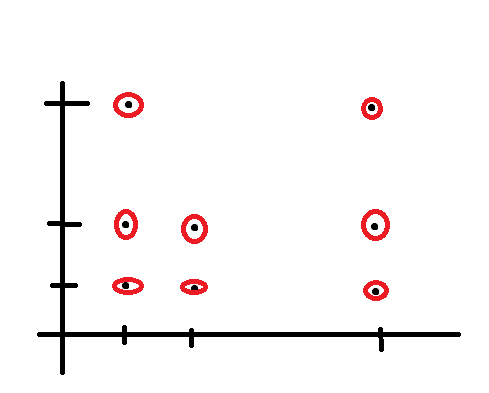
AxB={(-1,@), (-1,#), (-1,$), (2,@), (2,#), (2,$)}

Questo è il prodotto cartesiano di A con B

BxA={(@,-1), (@,2), ($,-1), ($,2), (#,-1), (#,2)}

Questo è il prodotto cartesiano di B con A

NOTA: AxB≠BxA! AxB ∩ BxA= Ø

OSS. Possiamo rappresentare AxB in questa maniera:

bl

b2

b1

a1 a2 an

A={a1, a2,…an…}

B={b1, b2,…bl…}

I puntini rappresentano gli elementi di AxB

**PROPRIETà DI UNIONE E INTERSEZIONE**

* **PROPRIETà COMMUTATIVA**

PROPOSIZIONE: Se A e B sono insiemi, allora A U B = B U A e A ∩ B = B ∩ A

DIMOSTRAZIONE: dobbiamo provare che:

1. A U B ⊆ B U A (è contenuto)
2. B U A ⊆ A U B (è contnuto)
3. Sia x ∈ A U B => x ∈ A o x ∈ B

Se x ∈ A => x ∈ B U A

]=> In ogni caso x ∈ B U A e quindi A U B ⊆ B U A

Se x ∈ B => x ∈ B U A

1. Sia x ∈ B U A => x ∈ B o x ∈ A

Se x ∈ B => x ∈ A U B

]=> In ogni caso x ∈ B U A e quindi B U A ⊆ A U B

Se x ∈ A => x ∈ A U B

* **PROPRIETà ASSOCIATIVA**

PROPOSIZIONE: Se A, B e C sono insiemi allora (A U B) U C = A U (B U C) e (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

DIMOSTRAZIONE: Proviamo solo che (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C), quindi dobbiamo dimostrare che:

1. (A ∩ B) ∩ C ⊆ A ∩ (B ∩ C)
2. A ∩ (B ∩ C) ⊆ (A ∩ B) ∩ C
3. Sia x ∈ (A ∩ B) ∩ C => x ∈ (A ∩ B) o x ∈ C => x ∈ A e x ∈ B e x ∈ C => x ∈ A e x ∈ (B ∩ C) e quindi (A ∩ B) ∩ C ⊆ A ∩ (B ∩ C)
4. Analoga

* **PROPRIETà DISTRIBUTIVA**

PROPOSIZIONE: Siano A, B e C insiemi allora

1. A U (B ∩ C) = (A U B) ∩ (A U C)
2. A ∩ (B U C) = (A ∩ B) U (A ∩ C)

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo la a, quindi:

1. A U (B ∩ C) ⊆ (A U B) ∩ (A U C)
2. A ∩ (B U C) ⊆ (A ∩ B) U (A ∩ C)
3. Sia x ∈ A U (B ∩ C) => x ∈ A o x ∈ (B ∩ C) => x ∈ A e x ∈ B e x ∈ C

Se x ∈ A => x ∈ A U B e x ∈ A U C

Se x B ∩ C => x ∈ B => x ∈ A U B

]=> x ∈ (A U B) e (A U C)

=> x ∈ C => x ∈ A U C

In ogni caso, x ∈ (A U B) ∩ (A U C) e quindi A U (B ∩ C) ⊆ (A U B) ∩ (A U C)

1. Se x ∈ (A U B) ∩ (A U C) => x ∈ (A U B) e se x ∈ (A U C) => (x ∈ A o x ∈ B) e (x ∈ A o x ∈ C). abbiamo i seguenti casi:
2. Se x ∈ A e x ∈ C
3. Se x ∈ B e x ∈ A
4. Se x ∈ B e x ∈ C
5. x ∈ A => x ∈ A U (B ∩ C)
6. x ∈ A => x (A U B)ᶜ A U (B ∩ C)
7. x ∈ B C => se x ∈ A U (B ∩ C)

in ogni caso se x ∈ A U (B ∩ C) e quindi (A U B) ∩ (A U C) ⊆ A U (B ∩ C)

* **LEGGI DI DE MORGAN**

PROPOSIZIONE: siano A e B ⊆ E (sottoinsiemi), allora:

1. (A U B)ᶜ = Aᶜ ∩ Bᶜ
2. Aᶜ ∩ Bᶜ = (A U B)ᶜ

DIMOSTRAZIONE: dimostriamo la a:

1. (A U B)ᶜ ⊆ Aᶜ ∩ Bᶜ
2. Aᶜ ∩ Bᶜ ⊆ (A U B)ᶜ

Assurdo partito da x ∈ A

Ciò che sappiamo

1. Sia x ∈ (A U B)ᶜ => x ∈ E e x ∉ A U B. se x ∈ A => x ∈ A U B=> x ∉ A => x ∈ Aᶜ.

Analogamente se x ∈ B => x ∈ A U B => x ∉ B => x ∈ Bᶜ. Quindi x ∈ Aᶜ ∩ Bᶜ

assurdo

1. Se x ∈ Aᶜ ∩ Bᶜ e x ∈ A U B => x ∈ A o x ∈ B. se x ∈ A, falsa => x ∉ A => x ∈ Aᶜ .

Analogamente x ∉ B e quindi x ∈ (A U B) ᶜ